

# ANÁLISIS ENERGÉTICO DEL CONTROL Y EL ERROR A SISTEMAS LINEALIZADOS IMPLEMENTANDO GPC Y DMC

## Energetic analysis of control and error to linealized systems implementing GPC and DMC

### RESUMEN

En este artículo se muestran los resultados obtenidos al realizar un análisis comparativo de la energía de la señal de control y el error, al implementar dos de los algoritmos más representativos del control predictivo basado en modelos, como lo son el GPC (Control Predictivo Generalizado) y el DMC (Control de Matriz Dinámica) a dos tipos de sistemas diferentes: los tanques acoplados y el motor de corriente continua.

**PALABRAS CLAVES:** Control de matriz dinámica, control predictivo generalizado, energía de la señal de control y el error.

### ABSTRACT

*This paper shows the obtained results when a comparative analysis of control and error signal energy is made, when two algorithms very representative of the model based predictive control, as the GPC (Generalized Predictive Control) and the DMC (Dynamic Matrix Control) are implemented to two types of different systems: the coupled tanks and the direct current motor.*

**KEYWORDS:** Control and error signal energy, dynamic matrix control, generalized predictive control.

### 1. INTRODUCCIÓN

El control predictivo basado en modelos (Model Predictive Control, MPC) es una de las metodologías del control automático que se ha desarrollado considerablemente en las últimas décadas tanto en la industria como en la comunidad de investigación. Este éxito se debe a que el control predictivo basado en modelo es quizás la forma más general de formular el problema de control en el dominio del tiempo. El control predictivo integra control óptimo, control de procesos con tiempos muertos, procesos multivariados y utiliza las referencias futuras cuando están disponibles. Al utilizar una estrategia con horizonte de control finito permite la consideración de restricciones y procesos no lineales [1]. El término control predictivo no designa a una estrategia de control particular sino a un conjunto de métodos de control que hacen uso explícito de un modelo del proceso para obtener la señal de control minimizando una función objetivo.

Dos algoritmos de gran relevancia en el MPC, por las incontables aplicaciones en la industria y en la investigación, son el control predictivo generalizado y el control de matriz dinámica, que difieren básicamente en el cálculo de la predicción y en el modelo utilizado para representar el proceso.

La idea en este artículo es mostrar las ventajas de implementar un algoritmo de control predictivo (como el

### JUAN PABLO GONZÁLEZ T.

Ingeniero Electrónico, M. Sc.

Profesor Auxiliar

Universidad Tecnológica de Pereira

[jpgonzalez@utp.edu.co](mailto:jpgonzalez@utp.edu.co)

### NICOLÁS TORO GARCÍA

Ingeniero Eléctrico, M.Sc.

Profesor Asistente

Universidad Nacional de Colombia

sede Manizales

[ntoroga@unal.edu.co](mailto:ntoroga@unal.edu.co)

GPC o el DMC) en un sistema determinado, desde el punto de vista de ahorro en el esfuerzo de control o en un mínimo error cuadrático medio.

Para realizar dicho análisis se calcularán las energías de control y del error, variando el factor de ponderación de la señal de control de cada algoritmo, implementados a 2 tipos de plantas: estable (tanques acoplados) e integrante (motor de corriente continua).

Con base en la tendencia de las energías, serán mostradas las ventajas y desventajas de implementar los dos controladores bajo los mismos parámetros de sintonía a cada uno de los tipos de sistemas.

### 2. CONTROLADORES PREDICTIVOS

Se presentan a continuación los dos principales algoritmos de control predictivo, mostrando sus principales características pero sin entrar en detalles (el DMC y el GPC se presentaron de manera más amplia en [2]).

#### 2.1 Control de matriz dinámica

Este método usa la respuesta ante el escalón para modelar el proceso, considerando sólo los  $N$  primeros términos, asumiendo por tanto que el proceso es estable [3]. En cuanto a las perturbaciones, se considera que su valor

permanece constante e igual al existente en el instante actual durante todo el horizonte, es decir, igual al valor medido de la salida ( $y_m$ ) menos el estimado por el modelo  $\hat{y}(t/t)$ .

$$\hat{n}(t+k/t) = \hat{n}(t/t) = y_m(t) - \hat{y}(t/t) \quad (1)$$

y por tanto el valor predicho de la salida será:

$$\hat{y}(t+k/t) = \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^N g_i \Delta u(t+k-i) + \hat{n}(t+k/t) \quad (2)$$

donde el primer término contiene las acciones de control futuras (que serán calculadas), el segundo los valores pasados de las acciones de control (conocidas) y el último representa las perturbaciones. La función de coste puede considerar sólo errores futuros o incluir también el esfuerzo de control [4].

## 2.2 Control predictivo generalizado

Este método propuesto por [5] emplea un modelo CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average) para la predicción de la salida:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (3)$$

donde la perturbación viene dada por un ruido blanco coloreado por el polinomio  $C(z^{-1})$ . Como en la práctica es difícil encontrar el verdadero valor de este polinomio, se puede emplear como parámetro de diseño para rechazo de perturbaciones o mejora de la robustez. La predicción óptima se lleva a cabo resolviendo una ecuación diofántica, lo cual puede hacerse eficazmente de forma recursiva.

Este algoritmo, al igual que otros que usan el modelo de función de transferencia, se puede implementar fácilmente en forma adaptativa usando un algoritmo de identificación en línea como los mínimos cuadrados recursivos.

El GPC usa una función de coste cuadrática de la forma:

$$J = \sum_{j=N1}^{N2} \delta(j) [\hat{y}(t+j/t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{Nu} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (4)$$

donde las secuencia de ponderación  $\delta(j)$  y  $\lambda(j)$  se eligen normalmente constantes o exponenciales y la trayectoria de referencia  $w(t+j)$  se puede generar como una

secuencia que empieza en el valor actual de la salida y tiende exponencialmente a la referencia [4].

## 3. ENERGÍA DE LA SEÑAL DE CONTROL Y ENERGÍA DEL ERROR (ERROR CUADRÁTICO MEDIO)

En controladores predictivos como el GPC y el DMC, se minimiza una función objetivo que penaliza la distancia entre la salida y la referencia y el esfuerzo en la señal de control; lo cual se pudo apreciar matemáticamente en [6], [7].

De hecho minimizar el error y el esfuerzo de control son dos de las consignas más importantes en la implementación de un sistema de control a una planta determinada.

Al tener un error mínimo en un proceso industrial se está logrando que la variable a controlar esté en el punto deseado y se obtenga en muchos casos buena calidad en el producto final. Al tener un mínimo esfuerzo de control se tiene ahorro en los costos de producción.

Idealmente en cualquier proceso se debe tener un error nulo y un mínimo esfuerzo de control, pero no siempre es posible obtener el mínimo resultado en los dos casos en un solo algoritmo.

Por ejemplo en algunos procesos industriales es más importante ahorrar energía de control para minimizar gastos de operación que tener un error nulo porque no es necesario que el producto final tenga una durabilidad de muchos años. En otros procesos puede ser indispensable que la salida del sistema se encuentre en la referencia deseada, a cuenta del esfuerzo de control requerido.

Hallando la energía de control y el error cuadrático medio, es posible comparar los 2 controladores predictivos (GPC y DMC) y analizar en cuál de estos se tiene más ahorro de energía de control o menor error.

Por ello se cuantificarán las energías del error y de la señal de control a través del concepto de la energía de una señal discreta, ya que los controladores predictivos son digitales.

La energía de una señal discreta  $x(n)$  está dada por:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (5)$$

y por lo tanto la energía de la señal de control  $E_c$  y del error  $E_e$  se expresarán por:

$$E_c = \sum_0^{Nm} |u(n)|^2 \quad (6)$$

$$E_e = \sum_0^{Nm} |w(n) - y(n)|^2 \quad (7)$$

Donde Nm es el número de muestras, u es la señal de control, y es la salida del sistema y w la referencia.

Con estos resultados en cada controlador se obtienen conclusiones y argumentos a la hora de implementar un control predictivo a un sistema determinado, ya que en algunos casos puede ser más necesario obtener ahorro en el esfuerzo de control y en otros menor error cuadrático medio.

#### 4. SIMULACIONES

Para obtener los cálculos correspondientes a las energías, se implementan los algoritmos en el entorno de programación Matlab, aprovechando las funciones matemáticas, de control y optimización [8], [9].

Por cada controlador se realizó un programa, en el que se ingresan las variables del modelo del sistema, las restricciones y demás parámetros correspondientes a los algoritmos.

A continuación se muestran los dos tipos de plantas que se sometieron al análisis propuesto (más información detallada se encuentra en [2]), correspondientes a un sistema estable como el nivel en los tanques acoplados y un sistema integrante como la posición en un motor de corriente continua.

##### 4.1 Tanques acoplados

Se obtiene la siguiente aproximación lineal de segundo orden discretizada del sistema [10], en la que se define la salida del sistema como el nivel en el tanque 2 y la entrada como el flujo en la bomba:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.2469z^{-1} + 0.00295z^{-2}}{1 - 0.5339z^{-1}} \quad (8)$$

Ahora se definen las restricciones en la señal de control, en la velocidad de la señal de control y en la salida, para ser tenidos en cuenta en cada optimización (programación cuadrática) del algoritmo.

Las restricciones en la señal de control que corresponde al flujo de entrada del tanque 1, son las siguientes:

$$U_{\max} = 180 \frac{cm^3}{seg}$$

$$U_{\min} = 0 \frac{cm^3}{seg}$$

$$\Delta U_{\max} = 80 \frac{cm^3}{seg}/s$$

$$\Delta U_{\min} = -80 \frac{cm^3}{seg}/s$$

Las restricciones en la salida que corresponde al nivel de líquido del tanque 2 son:

$$Y_{\max} = 100 \text{ cm}$$

$$Y_{\min} = 0 \text{ cm}$$

A continuación se procede a implementar el DMC y el GPC para controlar el nivel de líquido en el sistema, sintonizando de igual forma los horizontes de predicción y los factores de ponderación para los 2 algoritmos.

El factor de ponderación de la salida  $\delta$  se considerará igual a 1 (sugerido por [5]) y se tomarán diferentes valores del factor de ponderación de la señal de control para analizar el comportamiento del algoritmo.

Implementando el GPC y DMC con restricciones en el sistema, ante una referencia de 80 cm de nivel, con un horizonte de predicción  $N = 30$  y horizonte de control  $N_u = 5$ , se observa en la figura 1 el cálculo de la energía de la señal de control para  $\lambda = 0.2, 0.8, 1.5$  y 5.

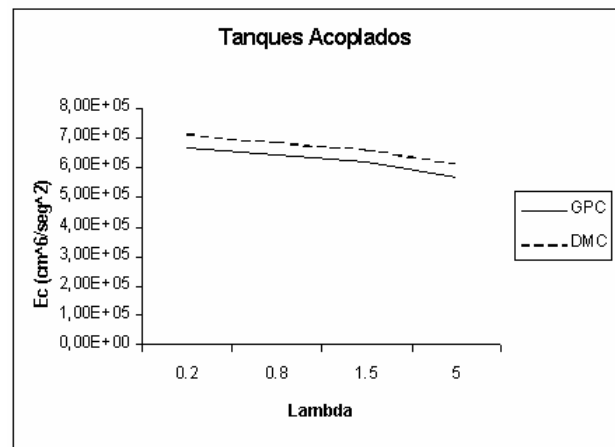


Figura 1. Energía de la señal de control vs Lambda para  $N=30$  y  $N_u=5$  en los tanques acoplados.

Como se aprecia en la figura 1, el cálculo de la energía de la señal de control obtenido para los dos algoritmos disminuye a medida que disminuye el factor de ponderación lambda, pero siendo siempre menor para el algoritmo GPC.

En la figura 2 se muestra el cálculo de la energía del error para este sistema, con los mismos parámetros de sintonía asignados.

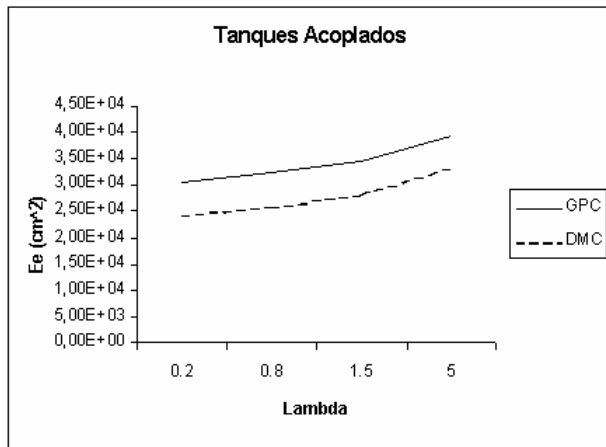


Figura 2. Energía de la señal del error vs Lambda para N=30 y Nu=5 en los tanques acoplados.

En el caso de la energía del error, se aprecia en la figura 2 la tendencia de incrementarse a medida que se aumenta el factor lambda, pero siendo siempre menor en el algoritmo DMC.

Cálculos de las energías de control y del error para otros horizontes de predicción y de control en este sistema, se hallaron en [2] obteniendo los mismos comportamientos descritos.

De acuerdo a los resultados obtenidos en las figuras 1 y 2, se concluye que al implementar los dos controladores predictivos en los sistemas estables bajo los mismos parámetros de sintonía, la energía de la señal de control siempre es menor en el GPC y la energía del error siempre es menor en el DMC, lo que implica que al elegir un control predictivo en este tipo de sistemas, si se desea precisión se debe aplicar el DMC o si se desea economía se debe aplicar el GPC.

#### 4.2 Motor de corriente continua

Se muestra la función de transferencia discreta del motor de corriente continua [11], en la que la salida es la posición angular del eje y la entrada es el voltaje aplicado a la armadura.

$$G(Z^{-1}) = \frac{0.001551z^{-1} + 0.003658z^{-2} + 0.0004738z^{-3}}{1 - 1.806z^{-1} + 0.8972z^{-2} - 0.09105z^{-3}} \quad (9)$$

Para este sistema las restricciones de la señal de entrada en voltios son las siguientes:

$$\begin{aligned} U_{\max} &= 125 \text{ V} \\ U_{\min} &= -125 \text{ V} \\ \Delta U_{\max} &= 100 \text{ V/s} \\ \Delta U_{\min} &= -100 \text{ V/s} \end{aligned}$$

Las restricciones que se tienen en la salida, es decir, en la posición angular del eje son:

$$\begin{aligned} Y_{\max} &= 100 \text{ rad} \\ Y_{\min} &= -100 \text{ rad} \end{aligned}$$

Ahora se fijan de igual forma los parámetros de sintonía de los dos algoritmos para implementar el control de posición del motor de corriente continua. El factor de peso del error será  $\delta=1$  [5] y se fija una referencia de 50 rad de posición del eje.

Con un horizonte de predicción  $N=30$  y un horizonte de control  $N_u=5$ , se tomarán valores del factor de peso de la señal de control  $\lambda=0.2, 0.8, 1.5$  y  $5$ . El comportamiento de las energías calculadas del sistema se aprecia en la figuras 3 y 4.

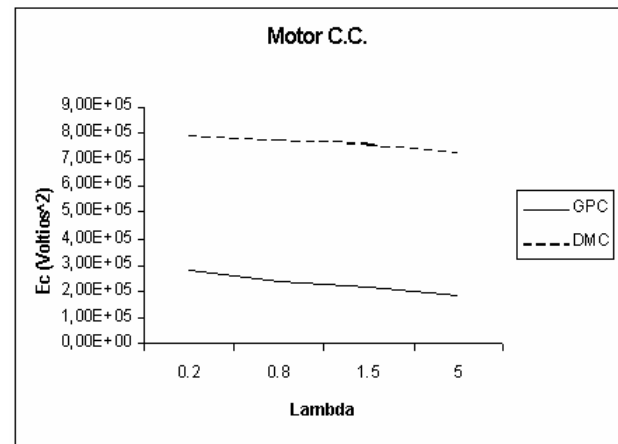


Figura 3. Energía de la señal de control vs Lambda para N=30 y Nu=5 en el motor de corriente continua.

Según los resultados mostrados en la figura 3, al aumentar el factor de ponderación lambda, disminuye la energía de la señal de control en los dos algoritmos, pero teniendo siempre menor magnitud en el caso del GPC.

En la figura 4 se ilustra el resultado del cálculo de la energía de la señal del error con los mismos parámetros de sintonía.

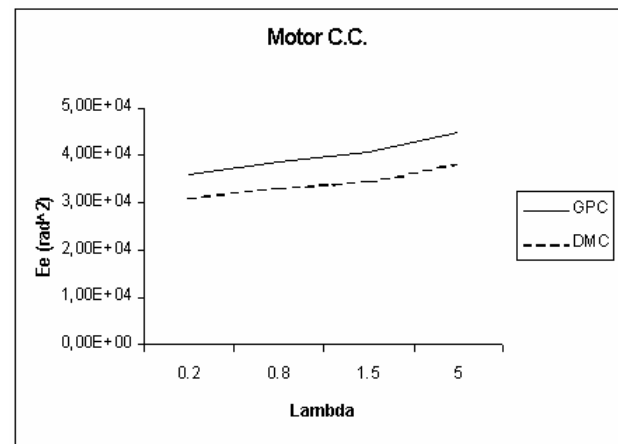


Figura 4. Energía de la señal del error vs Lambda para N=30 y Nu=5 en el motor de corriente continua.

Los resultados de la figura 4 muestran que al aumentar el factor de ponderación  $\lambda$ , la energía de la señal del error aumenta para ambos algoritmos, pero siempre con menor magnitud en el DMC.

De igual forma que en los tanques acoplados, se realizaron pruebas para diferentes horizontes de predicción y de control [2] en ambos algoritmos y se obtuvieron los mismos comportamientos descritos a este sistema.

Con los cálculos obtenidos para los tanques acoplados y el motor de corriente continua, se concluye que en sistemas estables e integrantes, al implementar el GPC y el DMC bajo los mismos parámetros de sintonía, la energía de la señal de control siempre es menor en el GPC y la energía del error siempre es menor en el DMC, lo que implica que si desea precisión se debe implementar el DMC o si desea economía se debe implementar el GPC.

Al aumentar el factor de ponderación de la señal de control  $\lambda$  del GPC y del DMC, en los sistemas estables (tanques acoplados) y en los sistemas integrantes (motor c.c.) se disminuye la energía de la señal de control y aumenta la energía del error.

En cuanto al impacto de la variación de la energía de la señal de control sobre la variación de la energía del error, se concluye que en los sistemas estables e integrantes, si la energía de control aumenta la energía del error disminuye y viceversa.

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este artículo se pretendía analizar a los dos controladores predictivos más relevantes, desde el punto de vista de ahorro de energía y de precisión en un proceso industrial estable o integrante. Para ello se implementaron el GPC y el DMC a dos sistemas con dinámicas diferentes y se calcularon las energías de la señal de control y del error, para comparar cuantitativamente el desempeño de los algoritmos y tener criterios para elegir el control adecuado a la necesidad que se presente.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

[1] E. Camacho and C. Bordons, *Model Predictive Control*, Springer-Verlag London Limited, 2004.

[2] J.P. González, “Análisis de la energía de la señal de control y el error a sistemas linealizados implementando GPC y DMC”, Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, Dic. 2005.

[3] M. Morari, J.H. Lee, and C.E. Garcia, *Model Predictive Control*, Mar. 15, 2002.

[4] A.C. Bordons. “Control predictivo: metodología, tecnología y nuevas perspectivas”, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla. Aguadulce, Almería, 2000.

[5] D.W. Clarke, C. Mohtadi, and P.S. Tuffs, “Generalized predictive control. Part I. The basic algorithm”. *Automatica*, 23(2), pp. 137-148, 1987.

[6] E.F. Camacho, “Constrained generalized predictive control”. *IEEE transactions on automatic control*, vol. 38, no. 2, feb. 1993.

[7] J. Sanchis, M. Martínez, X. Blasco y C. Ramos, “GPC con restricciones. Reducción en el tiempo de cálculo basada en el uso de componentes principales”. Universidad Politécnica de Valencia, 2002.

[8] T. Coleman, M.A. Branch, and A. Grace, “Optimization Toolbox for use with Matlab”, version 2.

[9] B.H. Shanian, *Control System Design Using Matlab*, Ed. Prentice Hall, 1993.

[10] E. Laubwald, “Coupled tanks systems 1”. [Online]. Available: <http://control-systems-principles.co.uk>.

[11] *Electrónica Unicrom*, “El motor de corriente continua”. [Online]. Available: [http://www.unicrom.com/Tut\\_MotorCC.asp](http://www.unicrom.com/Tut_MotorCC.asp).